

Coordinate Systems

Key

Math 2568

$$a.i. \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -4 \\ 2 & 1 & -3 \end{array} \right] \Rightarrow [\vec{x}]_B = \begin{bmatrix} -13/7 \\ 5/7 \end{bmatrix}$$

$$ii. \left[\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & -4 \\ 3 & -1 & -3 \end{array} \right] \Rightarrow [\vec{x}]_C = \begin{bmatrix} -7 \\ -18 \end{bmatrix}$$

$$iii. \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1/2 & -4 \\ 2 & 0 & -3 \end{array} \right] \Rightarrow [\vec{x}]_D = \begin{bmatrix} -3/2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$iv. \left[\begin{array}{cc|c} 7 & -3 & -4 \\ -9 & -1 & -3 \end{array} \right] \Rightarrow [\vec{x}]_E = \begin{bmatrix} 5/34 \\ 57/34 \end{bmatrix}$$

$$b.i. \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 7 \\ -2 & 1 & 8 \end{array} \right] \Rightarrow [\vec{x}]_G = \begin{bmatrix} -9/5 \\ 22/5 \end{bmatrix}$$

$$ii. \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -5 \\ -2 & 1 & 6 \end{array} \right] \Rightarrow [\vec{y}]_G = \begin{bmatrix} -17/5 \\ -4/5 \end{bmatrix}$$

$$iii. \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 11 \\ -2 & 1 & 2 \end{array} \right] \Rightarrow [\vec{z}]_G = \begin{bmatrix} 7/5 \\ 24/5 \end{bmatrix}$$

$$c.i. P_H = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \quad [\vec{x}]_H = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7/6 \\ -5/6 \end{bmatrix}$$

$$ii. P_J = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -5 \end{bmatrix} \quad [\vec{x}]_J = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 9 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -35/13 \\ 76/13 \\ 36/13 \end{bmatrix}$$

$$\text{iii. } P_K = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 8 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \quad [\vec{x}]_K = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 8 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 10 \\ -5 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/41 \\ 9/47 \\ 128/47 \\ -11/41 \end{bmatrix}$$

$$\text{d.i. } P_L = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$\text{ii. } P_M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -5 \end{bmatrix} \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 14 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$\text{iii. } P_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 8 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 8 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ -5 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 \\ 41 \\ -6 \\ 76 \end{bmatrix}$$

$$\text{e.i. } P_B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \quad P_C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -7 \end{bmatrix}$$

$$[\vec{x}]_C = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 \\ -19/2 \end{bmatrix}$$

$$\text{ii. } [\vec{x}]_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -7 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{iii. } P_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad P_C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$[\vec{x}]_C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15 \\ 6 \\ -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -127/11 \\ 225/11 \\ -211/11 \end{bmatrix}$$

$$\text{iv. } [\vec{x}]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 10 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 139/8 \\ 367/8 \\ -17/8 \end{bmatrix}$$

$$v. P_B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad P_C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$[X]_B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -76/3 \\ 20 \\ -88/3 \\ 35/3 \end{bmatrix}$$

$$vi. \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 24 \\ 12 \\ 9 \\ 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 355/17 \\ -1016/17 \\ 1024/17 \\ -8/17 \end{bmatrix}$$

$$vii. P_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad P_C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[X]_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16/3 \\ 6 \\ -7/3 \end{bmatrix}$$

$$f. i. P_C^{-1} P_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -7 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 13 & -14 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$ii. P_C^{-1} P_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 5 & 1 & -5 \\ 17 & -1 & -17 \\ 1 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$iii. P_C^{-1} P_B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{17} \begin{bmatrix} -11 & 8 & 22 & 25 \\ -12 & 1 & -10 & -50 \\ 22 & 35 & 7 & 1 \\ 7 & -2 & -14 & -2 \end{bmatrix}$$

$$g. i. [1 \ -2] \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 - 2 = 0 \checkmark$$

$$[1 \ -2] \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = 5$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 5 \quad [X]_B = \begin{bmatrix} -7/5 \\ 1/5 \end{bmatrix}$$

$$[3 \ 5] \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = 3 - 10 = -7$$

$$[3 \ 5] \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 6 + 5 = 11$$

$$ii. [1 \ 2 \ 4] \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 - 2 + 0 = 0 \quad [1 \ 2 \ 4] \begin{bmatrix} -4 \\ -8 \\ 5 \end{bmatrix} = -4 - 16 + 20 = 0$$

$$[2 \ -1 \ 0] \begin{bmatrix} -4 \\ -8 \\ 5 \end{bmatrix} = -8 + 8 + 0 = 0 \quad [1 \ 2 \ 4] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = 1 + 4 + 16 = 21$$

$$[2 \ -1 \ 0] \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = 4 + 1 + 0 = 5 \quad [-4 \ -8 \ 5] \begin{bmatrix} -4 \\ -8 \\ 5 \end{bmatrix} = 16 + 64 + 25 = 105$$

$$[1 \ 2 \ 4] \begin{bmatrix} 15 \\ 1 \\ -12 \end{bmatrix} = 15 + 2 - 48 = -31 \quad [2 \ -1 \ 0] \begin{bmatrix} 15 \\ 1 \\ -12 \end{bmatrix} = 30 - 1 + 0 = 29$$

$$[-4 \ -8 \ 5] \begin{bmatrix} 15 \\ 1 \\ -12 \end{bmatrix} = -60 - 8 - 60 = -128 \quad \vec{x}_c = \begin{bmatrix} -31/21 \\ 29/5 \\ -128/105 \end{bmatrix}$$

$$iii. [1 \ -2 \ 2 \ -1] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 0 + 0 + 2 - 2 = 0 \quad [1 \ -2 \ 2 \ -1] \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 - 2 + 0 + 0 = 0$$

$$[1 \ -2 \ 2 \ -1] \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 + 4 - 4 - 1 = 0 \quad [0 \ 0 \ 12] \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$[0 \ 0 \ 12] \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 + 0 - 2 + 2 = 0 \quad [2 \ 1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 - 2 + 0 + 0 = 0$$

$$[1 \ -2 \ 2 \ -1] \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ -6 \\ 11 \end{bmatrix} = 5 - 16 - 12 - 11 = -34 \quad [0 \ 0 \ 12] \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ -6 \\ 11 \end{bmatrix} = 0 + 0 - 6 + 22 = 16$$

iii. cont'd

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ -6 \\ 11 \end{bmatrix} = 10 + 8 + 0 + 0 = 18$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ -6 \\ 11 \end{bmatrix} = 5 - 16 + 12 + 11 = 12$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = 1 + 4 + 4 + 1 = 10$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 0 + 0 + 1 + 4 = 5$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 4 + 1 + 0 + 0 = 5$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 + 4 + 4 + 1 = 10$$

$$\begin{bmatrix} x \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} -34/10 \\ 16/5 \\ 18/5 \\ 12/10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -17/5 \\ 16/5 \\ 18/5 \\ 6/5 \end{bmatrix}$$